

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA – MIEEC/FEUP

PARTE TEÓRICA — Perguntas de desenvolvimento

1. Dada uma experiência aleatória ϵ e o espaço amostral associado S , defina:

- a) Acontecimento elementar
- b) Probabilidade de um acontecimento A
- c) Variável aleatória.

2. Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e p ($X \sim b(n,p)$). Recorrendo à definição de valor esperado mostre que:

- a) $E(X) = np$
- b) $V(X) = npq$, $q = 1 - p$

3. Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e p ($X \sim b(n,p)$). Determine a função geradora de momentos para esta variável aleatória.

4. Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e p ($X \sim b(n,p)$). Recorrendo à função geradora de momentos, mostre que:

- a) $E(X) = np$
- b) $V(X) = npq$, $q = 1 - p$

5. Dados dois acontecimentos A e B , sendo $P[A] > 0$, defina $P[B|A]$ e mostre que satisfaz às condições impostas para uma probabilidade.

6. Dados dois acontecimentos A e B :

- a) Defina a noção de independência entre os acontecimentos A e B .
- b) Demonstre que se A e B são independentes também serão independentes os acontecimentos A e $\bar{B}$.
- c) Demonstre que se A e B são independentes também serão independentes os acontecimentos $\bar{A}$ e $\bar{B}$.

7. Considere três acontecimentos A , B e C tais que $P(A) = 0,6$, $P(C) = 0,4$, $P(A \cap C) = 0,3$, $P(\bar{A} \cap B) = 0,2$ e $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 0,1$. Determine $p = P[(A \cup B) \cap \bar{C}]$, justificando todos os resultados obtidos.

8.

- a) Defina variável aleatória unidimensional.
- b) Como se classificam ? Dê exemplos.

9. Considere uma experiência que consiste em lançar à sorte dois dados e registrar os valores do mínimo obtido e da soma entre o mínimo e o outro valor obtido.

- a) Indique os elementos do espaço amostral
- b) Indique uma partição com três elementos em que dois deles (e apenas dois) tenham a mesma probabilidade de ocorrência.

10. Seja $f_X(x)$ a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória X e seja $g(x)$ uma função real da variável real x . Então podemos definir uma nova variável aleatória $Y = g(X)$.

- a) Admitindo que $g(x)$ é uma função **estritamente monótona e decrescente** obtenha a expressão para a função de distribuição da variável aleatória Y à custa da função de distribuição da variável X .
- b) Considerando agora que $g(x)$ é **estritamente monótona** demonstre a validade do seguinte resultado:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} \Big|_{x=g^{-1}(y)}$$

em que $f_Y(y)$ representa a função densidade de probabilidade de Y .

- c) Demonstre que se pode generalizar o resultado da alínea anterior a uma situação em que a função $g(x)$ não seja monótona.
Sugestão: Considere por exemplo $g(x) = x^2$.

11. Defina experiência aleatória, espaço amostral e acontecimento. Apresente um exemplo de cada.

12. Sabendo que, por definição, $\text{Var}(X) = E[X - E(X)]^2$ prove que $\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$

13. Seja X uma variável aleatória com valor esperado μ e variância σ^2 . Definindo uma nova v.a. $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ prove que $E(Y) = 0$ e $\text{Var}(Y) = 1$.

14. Enuncie a desigualdade de Chebyshev e explique a sua importância.

15. Enuncie as propriedades que caracterizam aquilo que se define habitualmente como uma sucessão de provas de Bernoulli.

16. Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro λ ($X \sim p(\lambda)$). Recorrendo à definição de valor esperado mostre que:

- a) $E(X) = \lambda$
- b) $V(X) = \lambda$

17. Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro λ ($X \sim p(\lambda)$). Determine a função geradora de momentos para esta variável aleatória.

18. Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro λ ($X \sim p(\lambda)$). Recorrendo à função geradora de momentos, mostre que:

- a) $E(X) = \lambda$
- b) $V(X) = \lambda$

19. Explique a aplicação da desigualdade de Chebishev na demonstração da relação existente entre a probabilidade de um acontecimento e a sua frequência relativa.

20.

- a) Defina estimação pontual e estimação por intervalo.
- b) Indique quais as propriedades desejáveis para um estimador pontual.

21.

- a) Calcule $V(X+Y)$ no caso de X e Y não serem independentes. Exprima o resultado em função da $V(X)$ e da $V(Y)$.
- b) Mostre que no caso de X e Y serem independentes, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

22.

- a) Diga o que entende por intervalo de confiança para um parâmetro da população.
- b) O que precisa para construir um intervalo de confiança?

23. Num teste de hipóteses:

- b) O que entende por probabilidade de um erro do tipo I ?
- b) O que entende por probabilidade de um erro do tipo II ?
- c) Como consegue diminuir simultaneamente estes dois erros ?

24. Enuncie o Teorema do Limite Central e explique a sua importância.

25. Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f_X(x)$ e com função de distribuição $F_X(x)$. Considere uma amostra aleatória de dimensão n de X . Mostre que a função densidade de probabilidade do mínimo da amostra, $f_K(k)$, é dada por:

$$f_K(k) = n \cdot [1 - F_X(k)]^{n-1} \cdot f_X(k)$$

26. Identifique os passos básicos na construção de um teste de hipóteses.

27.

- a) Dê um exemplo de uma variável aleatória do tipo hipergeométrico.
- b) Esta distribuição pode ser aproximada por outras distribuições? Em caso afirmativo, quais são essas distribuições e em que condições é que é possível fazer essa aproximação?

28. Mostre que o valor esperado de uma variável aleatória com distribuição exponencial (negativa) de parâmetro λ vale $\frac{1}{\lambda}$.

29. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional.

- a) Defina o coeficiente de correlação linear entre X e Y , ρ_{XY} .
- b) Admita que $\rho_{XY} = 0$. Podemos ou não afirmar que as variáveis aleatórias X e Y são independentes? Justifique a sua resposta.

30. Dada uma variável aleatória X com distribuição geométrica de parâmetro p :

- d) Mostre que a função geradora de momentos é :

$$G_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}$$

- e) A partir do resultado da alínea anterior calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

31. Dadas duas variáveis aleatórias X e Y , sendo $Y = aX + b$ com $a, b \in \mathfrak{R}$, mostre que o coeficiente de correlação linear ρ satisfaz a seguinte relação: $\rho = \pm 1$

32. Dadas duas variáveis aleatórias X e Y , tais que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Y = aX + b$ com $a, b \in \mathfrak{R}$, mostre que $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

33. Prove que se $X_1, X_2, \dots, X_n$ forem uma amostra aleatória de uma variável aleatória de Poisson de parâmetro λ , a estimativa de máxima verosimilhança de λ é $\hat{\lambda} = \bar{X}$

34. Defina estacionariedade de um processo estocástico.

35. Define-se um processo estocástico discreto do seguinte modo: “Uma moeda é lançada ao ar e se o resultado é CARA, $X_n = (-1)^n$, se é COROA, $X_n = (-1)^{n+1}$, para todo o $n \in N$.”

- a) Indique quais as realizações do processo.
- b) Determine a função de probabilidade de X_n .
- c) Determine a função conjunta de probabilidade de X_n e X_{n+1} .
- d) Determine a média e a autocovariância de X_n .